



APLICAÇÃO DE MÉTODOS CONVENCIONAIS DE ASSIMILAÇÃO DE DADOS NA DINÂMICA DE ROTORES

Humberto Camargo Piccoli

Fundação Universidade do Rio Grande, Departamento de Materiais e Construção
Cx. P. 474 - 96201-900 - Rio Grande, RS, Brasil

***Resumo.** Os métodos de assimilação de dados são amplamente utilizados em previsões meteorológicas. Previsões meteorológicas numéricas são baseadas em integração de equações diferenciais que descrevem o comportamento climático. Como as equações são obtidas teoricamente, é necessário introduzir condições iniciais adequadas e corrigir periodicamente seus resultados para obter valores mais precisos, o que é feito pelos métodos de assimilação de dados. Em modelos de dinâmica de rotores o problema é similar: os movimentos também são descritos por equações diferenciais. Dois fatores agravantes podem tornar o problema mais complexo: a) o movimento de rotores, normalmente, só pode ser monitorado em alguns poucos pontos e estes resultados devem ser extrapolados para as diversas variáveis do modelo matemático; b) os autovetores, que são utilizados para construir uma matriz de projeção dos dados, fundamental para a aplicação dos Métodos da Inicialização, são complexos. O Método da Inicialização consiste na preparação das condições iniciais com o objetivo de filtrar modos não significativos e os Métodos de Relaxação Dinâmica e Interpolação Ótima, recolhem medições e atualizam os resultados da integração. Este trabalho apresenta a adaptação dos Métodos de Inicialização, Relaxação Dinâmica e Interpolação Ótima, considerados métodos convencionais de assimilação de dados em meteorologia, à dinâmica de rotores. Alguns resultados da aplicação dos métodos de Inicialização e Relaxação Dinâmica em um modelo de um rotor vertical que simula o comportamento de uma turbina do tipo Francis foram obtidos e comparados com a integração direta das equações diferenciais. Uma avaliação preliminar destes resultados foi positiva demonstrando que os mesmos podem se tornar ferramentas eficientes no auxílio à simulação numérica de sistemas rotativos ou estruturais.*

***Palavras-chave:** assimilação de dados, dinâmica de rotores, inicialização, relaxação dinâmica, interpolação ótima.*

1. INTRODUÇÃO

A idéia de trazer para a dinâmica de rotores os métodos de assimilação de dados utilizados em modelos meteorológicos e de circulação oceânica, baseia-se no fato de que as equações constituintes para estes tipos de sistemas dinâmicos são semelhantes. Em dinâmica de rotação, a presença do efeito giroscópico introduz a particularidade de tratar com autovetores

complexos (Gash & Knothe, 1987) além dos demais problemas inerentes à integração numérica de equações diferenciais em alguns casos não lineares.

Os métodos de assimilação de dados foram desenvolvidos para executarem a tarefa de corrigir os valores calculados em modelos matemáticos, trazendo-os à realidade, melhorando significativamente a precisão das simulações numéricas (Daley, 1978). A essência dos métodos de assimilação de dados consiste no uso de variáveis observadas (não necessariamente todas as variáveis) para corrigir variáveis calculadas (todas as variáveis no modelo matemático). Na maioria dos casos é impossível monitorar todas as variáveis utilizadas em um modelo matemático pois muitas delas representam movimentos de pontos internos dos elementos constituintes do sistema físico e, adicionalmente, com a utilização de técnicas de discretização refinadas, o número de pontos a serem observados é geralmente muito grande fazendo com que seja necessário um grande número de instrumentos de medição. Isto provoca um aumento considerável nos custos e tempo de duração do experimento. Por outro lado, a escolha correta de condições iniciais pode ser um problema crítico, especialmente em sistemas não lineares. Condições iniciais fisicamente consistentes devem ser introduzidas e a simulação deve passar por um tempo em que os transientes são amortecidos até que a solução ocupe o seu sub-espaço no espaço de estado. Em sistemas não lineares uma escolha inadequada das condições iniciais pode produzir uma solução em um sub-espaço diferente daquele fisicamente real. Sistemas caóticos, sensíveis às condições iniciais, podem ter sua solução atraída por diferentes bacias de atração com pequenas alterações das condições iniciais (efeito borboleta) (Moon, 1992). Os métodos de assimilação de dados se apresentam como propostas de solução para estes problemas.

Este trabalho é resultado parcial de um trabalho de pesquisa que está dividido em duas partes: (a) aplicação de métodos convencionais e (b) aplicação de métodos avançados de assimilação de dados. Estes métodos estão assim classificados de acordo com Todling (1997) que considera métodos convencionais aqueles usados em centros operacionais de previsão meteorológica como NCEP (National Center for Environmental Prediction, Estados Unidos) e ECMWF (European Center for Medium-Range Weather Forecasts, Inglaterra).

Os métodos convencionais de assimilação de dados são **Inicialização, Relaxação Dinâmica e Interpolação Ótima**. O Método da Inicialização não é propriamente um método de assimilação de dados. A sua essência é preparar as condições iniciais, através da filtragem de modos naturais não significativos, para que o processo de integração numérica possa ser iniciado com consistência. Os modos não significativos, algumas vezes são de natureza numérica e se não forem adequadamente amortecidos podem gerar importantes erros nos resultados finais. Para que ocorra consistência, as condições iniciais devem excitar apenas os modos naturais reais e significativos (dentro de uma faixa de frequência fisicamente realizável). Segundo esta ótica a Inicialização é o primeiro passo do processo de assimilação de dados sendo que, em alguns casos, a utilização conjunta de outro processo de assimilação durante o processo de integração pode eliminar a necessidade da inicialização. Entretanto, a sua utilização não introduz qualquer erro na solução das equações. A Relaxação Dinâmica é um esquema de assimilação de dados contínuo no tempo. Termos forçantes, representando as observações das variáveis, são adicionados às equações diferenciais. O objetivo é de relaxar os campos em direção às observações. Neste procedimento os campos iniciais estão automaticamente balanceados dinamicamente ao final do período de relaxação, quando a previsão pode ser efetuada. A Interpolação Ótima é um método intermitente utilizado em aplicações climáticas em tempos sinóticos (tempos em que são disponibilizadas as medições das variáveis: 9:00 h, 15:00 h, 21:00 h GMT). Neste método as variáveis calculadas são instantaneamente atualizadas com base nas medições efetuadas. É, na prática, um método de inicialização intermitente.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: a Seção 1 é esta introdução; a Seção 2 apresenta as equações diferenciais matriciais que descrevem o sistema dinâmico estudado e apresenta a forma de obtenção de sua solução; a Seção 3 mostra como aplicar o Método de Inicialização para dar partida ao processo de integração numérica das equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema rotativo; a Seção 4 apresenta o Método da Relaxação Dinâmica aplicado à mesma dinâmica de rotores; a Seção 5 introduz o Método da Interpolação Ótima para realizar a mesma tarefa de aproximar a solução das equações diferenciais às observações; a Seção 6 mostra alguns resultados com comparação de métodos quando aplicados em testes numéricos de um modelo de um rotor vertical, simulando o comportamento de uma turbina do tipo Francis e a Seção 7 apresenta as conclusões observadas.

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SISTEMAS DINÂMICOS ROTATIVOS

Um sistema dinâmico rotativo possui o seu movimento governado pela equação diferencial matricial (Lalanne & Ferraris, 1990)

$$M\ddot{r} + (C + G)\dot{r} + Kr = F, \quad (1)$$

onde M é a matriz de massa do sistema rotativo, C é a matriz de amortecimento, G é a matriz giroscópica, K é a matriz de rigidez, r é o vetor de deslocamentos e F é o vetor de forças atuantes no sistema rotativo (o ponto sobre a variável representa sua derivada em relação ao tempo).

Estas equações também podem ser apresentadas na forma de estado

$$Ax - B\dot{x} = f \quad (2)$$

onde as matrizes A e B podem assumir a forma

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} C + G & K \\ K & O \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} -M & O \\ O & K \end{bmatrix} \\ f &= \begin{Bmatrix} F \\ O \end{Bmatrix} \\ x &= \begin{Bmatrix} \dot{r} \\ r \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Assumindo solução harmônica para a vibração livre gera-se o seguinte problema de autovalores

$$AX = \lambda BX \quad (4)$$

onde λ é uma matriz diagonal, semi-definida contendo os autovalores do problema apresentado na Eq. (2) e X é matriz que contém os autovetores correspondentes.

Com a presença da matriz giroscópica o problema de autovalores gerado apresenta solução complexa e, de acordo com a Eq. (4), os autovetores encontrados são os chamados autovetores "à direita" (Gash & Knothe, 1987) que diferem dos autovetores "à esquerda".

3. MÉTODO DA INICIALIZAÇÃO

A inicialização é o processo de projetar um estado geral, representado por um vetor \mathbf{x} de dimensão n em um determinado instante de tempo (a propósito, o tempo inicial), em um sub-espaço de modos naturais reais. O vetor \mathbf{x} , no espaço de estado \mathcal{H} é constituído por deslocamentos e velocidades de pontos do modelo do sistema rotativo. Se \mathcal{M} é o sub-espaço ocupado pelos modos naturais reais de vibração do sistema rotativo, então pode ser definido um operador que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \text{Range } \mathbf{V} &= \mathcal{M} \quad \text{e} \\ \mathbf{V}^2 &= \mathbf{V} \end{aligned} \quad (5)$$

A projeção no sub-espaço \mathcal{M} é dada por uma matriz simétrica e positivo-definida \mathbf{H} , obtida de tal forma que

$$(\mathbf{H}\mathbf{V})^T = \mathbf{H}\mathbf{V} \quad (6)$$

de maneira que quando a projeção for ortogonal \mathbf{H} é uma matriz identidade.

Sendo \mathbf{X} a matriz dos autovetores do problema de autovalores apresentado na Eq. (4), pode ser construída uma matriz \mathbf{X}_r , de dimensão $n \times n_r$ com $n_r < n$, contendo apenas os autovetores correspondentes aos autovalores efetivos do sistema rotativo (correspondentes às frequências naturais fisicamente efetivas, ou observadas experimentalmente). O projetor \mathbf{V} é então obtido por

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}_r (\mathbf{X}_r^T \mathbf{H} \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^T \mathbf{H}, \quad (7)$$

satisfazendo as condições (5).

O problema da Inicialização é encontrar um vetor de estado de dimensão n , contendo as condições iniciais $\mathbf{x}_{ini}^M \in \mathcal{M}$ tão próximas quanto possível a $\mathbf{x}_{ini}^H \in \mathcal{H}$. O método dos mínimos quadrados é então utilizado para minimizar o seguinte funcional

$$\mathbf{a} = (\mathbf{x}_{ini}^M - \mathbf{x}_{ini}^H)^T \mathbf{H} (\mathbf{x}_{ini}^M - \mathbf{x}_{ini}^H) \quad (8)$$

Este problema de Inicialização é conhecido como "Inicialização Variacional Linear de Modo Normal" e pode ser provado (Todling, 1997, Daley, 1978, e Temperton, 1984) que o minimizador único do funcional é

$$\mathbf{x}_{ini}^M = \mathbf{V} \mathbf{x}_{ini}^H \quad (9)$$

Estas são as condições iniciais a serem impostas a um modelo matemático quando se efetua uma simulação numérica.

Em um sistema dinâmico rotativo, os elementos da matriz dos autovetores são números complexos. Para que toda a informação contida nestes números fosse preservada, adotou-se a

utilização dos módulos dos mesmos para a montagem da matriz X . A matriz X_r é, então, constituída pelas primeiras n_r colunas de $|X|$.

4. MÉTODO DA RELAXAÇÃO DINÂMICA

O Método da Relaxação Dinâmica, cujo princípio de funcionamento já foi descrito na Seção 1, é empregado para introduzir termos forçantes nas equações formuladas no espaço de estado, Eq. (2). Estes termos forçantes são responsáveis por aproximar a solução aos valores medidos, durante o processo combinado de simulação e observação. A introdução dos termos forçantes na Eq. (2) resulta em

$$Ax - B\dot{x} = f + \gamma(x_o - x) \quad (10)$$

onde γ é uma matriz diagonal que contém os parâmetros de relaxação e x_o é um vetor constituído pelas variáveis observadas. A proposição aqui apresentada é a de calcular os parâmetros de relaxação através da mesma equação de maneira a minimizar as diferenças entre valores observados e valores calculados das variáveis.

Sendo x_s a solução exata da Eq. (2) sem os termos de relaxação e x_m a solução da Eq. (10), o erro pode ser estabelecido como

$$x_e = x_m - x_s \quad (11)$$

Introduzindo este resultado na Eq. (10) resulta

$$Ax_e - B\dot{x}_e = f - \gamma x_e \quad (12)$$

que é uma equação diferencial de mesma forma que a Eq. (2) e pode ser resolvida simultaneamente. Desta maneira, durante o processo de integração das equações diferenciais se obtém os erros das variáveis que podem ser utilizados para corrigir os valores calculados pela simulação. Este método depende, portanto, de medições efetuadas continuamente ao longo do processo de integração.

5. MÉTODO DA INTERPOLAÇÃO ÓTIMA

Ao contrário do Método da Relaxação Dinâmica, o Método da Interpolação Ótima é um método de atualização intermitente dos resultados numéricos da integração da Eq. (2). O processo se desenvolve da seguinte forma: durante um determinado intervalo de tempo a integração da Eq. (2) evolui normalmente. Transcorrido um tempo previamente estabelecido (tempo este em que as medições estão disponíveis), é interrompido o procedimento numérico e as variáveis são atualizadas. A correção das variáveis calculadas é obtida por

$$x_a = x + K_p(x_o - Hx) \quad (13)$$

onde x_a é o vetor das correções (variáveis analisadas) e K_p é uma matriz de ponderação dada por

$$K_p = SH^T(HSH^T + R) \quad (14)$$

em que devem ser especificadas as matrizes de covariância das previsões, S , e dos erros R . Para sistemas lineares a matriz S pode ser calculada, apesar do alto custo computacional envolvido. Em sistemas não lineares ou quando não se conhece os erros de modelagem e de medição esta matriz deve ser especificada com base em procedimentos estatísticos com a aplicação de restrições dinâmicas.

Definindo p como o vetor posição no espaço de estado, a matriz de covariância do erro entre os pontos p_i e p_j é dada por

$$S(p_i, p_j) = E\{\tilde{u}(p_i)\tilde{u}(p_j)\} \quad (15)$$

onde $\tilde{u}(p)$ é o erro entre as variáveis medidas e calculadas. As funções de covariância (elementos da matriz S), entre duas variáveis u e v , medidas em pontos distintos no espaço de estado, podem ser obtidas por

$$S_{uv} = \sigma_u \sigma_v C_{uv} \quad (16)$$

em que σ_u e σ_v são os desvio padrões dos erros de medição de u e v e C_{uv} o coeficiente de correlação entre estes mesmos erros. O problema que surge aqui é que não são todas as variáveis que são medidas devendo-se adotar um critério de generalização para extrapolar as estatísticas dos erros. Algumas possíveis soluções devem ser investigadas antes da implementação do método.

6. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Foram realizados alguns testes numéricos para avaliar a eficiência dos métodos de Inicialização e Relaxação Dinâmica, descritos nas Seções 3 e 4, quando aplicados à dinâmica de sistemas rotativos. Para testar estes métodos foi utilizado um modelo matemático de um rotor vertical com amortecimento e desbalanceado, construído pelo Método dos Elementos Finitos. O modelo simula o comportamento dinâmico de uma turbina Francis, possuindo quatro nós, quatro elementos do tipo viga de Timoshenko, três elementos do tipo inércia em com vinculação elástica em dois nós (Piccoli, 1994).

6.1 Inicialização

Para testar o Método da Inicialização, inicialmente foi realizada uma simulação com condições iniciais nulas e após quatro períodos de oscilação síncrona foram registrados os valores das variáveis nodais. Assumindo que sejam conhecidos deslocamentos e velocidades lineares em dois nós (pontos possíveis de medição, correspondentes aos mancais), foram realizadas duas novas simulações: a primeira apenas com os deslocamentos e velocidades lineares dos dois nós previamente escolhidos sendo introduzidos como condições iniciais e a segunda aplicando-se o Método da Inicialização com os deslocamentos e velocidades lineares destes dois nós sendo projetados (projeção ortogonal) no sub-espaço formado pelos oito primeiros modos naturais (conhecidos experimentalmente), produzindo um conjunto completo de condições iniciais. A Figura 1 mostra os dois primeiros períodos do deslocamento em uma direção arbitrária em um dos nós previamente escolhidos.

Os resultados dos dois testes podem ser comparados com a simulação numérica original e pode ser visto que a utilização do Método da Inicialização apresenta resultados sensivelmente melhores. Calculou-se o erro em valor RMS que resultou em $1,65 \times 10^{-5}$ m para o deslocamento obtido com a simulação com Inicialização e $1,73 \times 10^{-5}$ m sem o emprego do

método. Apesar da pequena diferença entre os dois erros o principal aspecto a ser considerado é a atenuação dos transientes, conseguida com a aplicação do método. Alguns pontos devem ser considerados em uma análise que objetive a aplicação do Método da Inicialização. O primeiro deles é a respeito da matriz de projeção B : deve-se investigar sobre as possibilidades de utilização de projeções oblíquas uma vez que, apesar dos modos utilizados serem verdadeiros, existem vários modos reais que não estarão sendo considerados ou estarão sendo utilizados com imprecisão. A projeção ortogonal faz com que os modos considerados concentrem toda a energia concedida pelas condições iniciais, o que não é absolutamente preciso na realidade. Um outro ponto é justamente a decisão de quantos e quais modos devem ser conservados. No exemplo aqui utilizado foram utilizados modos observados experimentalmente em um rotor real cujo modelo matemático foi o testado. A questão é que possivelmente alguns modos verdadeiros não devem ter sido observados tendo sido desprezados indevidamente. Deve, portanto, ser feita uma análise sobre a influência dos modos conservados.

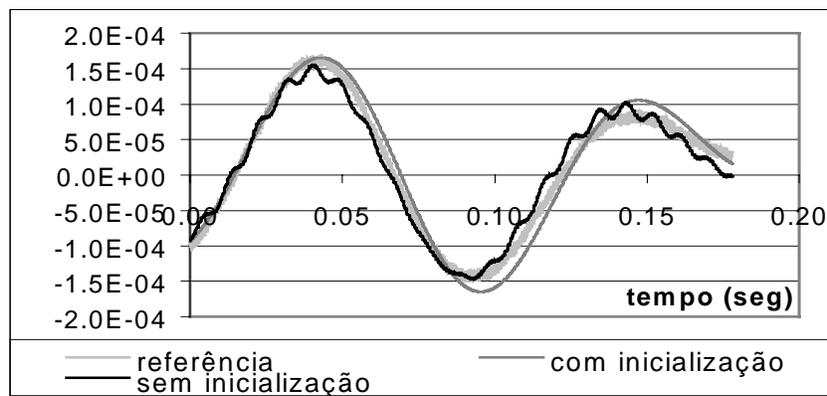


Figura 1 – Comparação entre deslocamentos medidos com e sem inicialização.

6.2 Relaxação Dinâmica

Para testar o Método da Relaxação Dinâmica foi utilizado o mesmo modelo. Como referência foi feita uma simulação com as condições iniciais calculadas pelo Método da Inicialização. A seguir foram realizadas duas novas simulações: a primeira com a redução da amplitude da força de desbalanceamento para 90 % de seu valor original e a segunda com esta mesma redução associada à aplicação do Método da Relaxação Dinâmica, considerando como observados os valores da simulação de referência. Observou-se uma grande sensibilidade dos resultados à escolha dos parâmetros de relaxação. Os melhores resultados obtidos até agora foram com os parâmetros de relaxação calculados na forma

$$\gamma_i = \frac{f + B\dot{x}_i - Ax_i}{x_i - \dot{x}_i\Delta t + x_{o(i-1)}} \quad (17)$$

com o índice i significando o passo de integração presente e $i-1$ o passo anterior. Esta expressão foi obtida de forma a anular o erro $(x_o - x_m)$ considerando constante a taxa de variação da variável observada no passo anterior.

A Fig. 2 mostra os resultados da aplicação da Relaxação Dinâmica comparados com a referência. O erro quadrático médio nesse caso foi de 3×10^{-5} m para o deslocamento enquanto que a não aplicação do método resultou em um erro correspondente de 4×10^{-5} m. É importante considerar também que a introdução dos parâmetros de relaxação na forma

presente resultaram em uma alteração na frequência síncrona ocasionada pela não linearidade presente uma vez que estes mesmos parâmetros passam a ser dependentes dos valores dos deslocamentos. As consequências destas não linearidades em outras combinações de parâmetros do sistema deve ser profundamente investigadas para que se possa assegurar que as soluções obtidas ocuparão bacias de atração estáveis no espaço de estado sem a ocorrência de atratores estranhos.

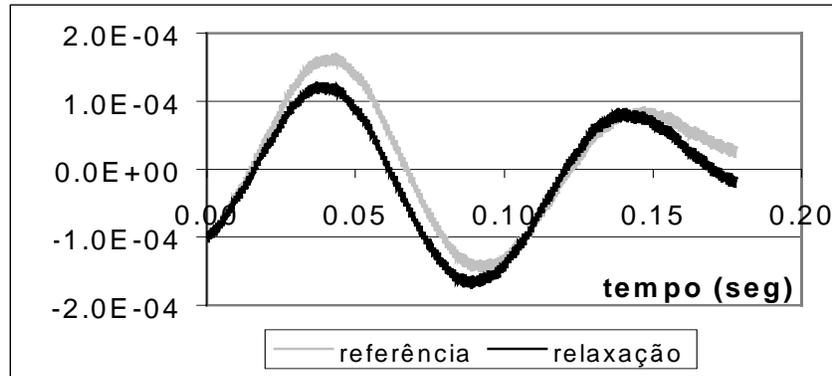


Figura 2 – Aplicação do Método da Relaxação Dinâmica

7. CONCLUSÕES

O presente trabalho objetiva avaliar a utilização de métodos convencionais de assimilação de dados em dinâmica de sistemas rotativos. Estes métodos são tradicionalmente utilizados em meteorologia e circulação de sistemas oceânicos. Foram realizadas adaptações dos métodos para aplicação nas equações diferenciais que descrevem a dinâmica de rotores. Alguns testes numéricos foram realizados com a aplicação dos Métodos de Inicialização e Relaxação Dinâmica em um modelo de um rotor vertical com resultados satisfatórios. Foram também identificados pontos onde a investigação deve se aprofundar a fim de melhorar os resultados obtidos. A utilização do Método da Inicialização requer um estudo maior com relação à melhor matriz de projeção e à escolha dos modos naturais a serem conservados. O Método da Relaxação Dinâmica mostrou-se extremamente sensível aos parâmetros de relaxação que podem introduzir não linearidades nas equações. Preliminarmente, os resultados obtidos com os testes descritos na Seção 6 apontam para uma avaliação positiva dos métodos testados.

REFERÊNCIAS

- Daley, R., 1978, Variational non-linear mode initialization, *Tellus*, vol. 30, p. 201-218.
- Gash, R. & Knothe, K., 1987, *Strukturdynamik. Band 1: Diskrete Systeme*, Springer, Berlin.
- Lalanne, M. & Ferraris, G., 1990, *Rotordynamics Prediction in Engineering*, John Wiley & Sons, Chichester, England.
- Moon, F.C., 1992, *Chaotic and Fractal Dynamics, An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, New York.
- Piccoli, H.C., 1994, Observação de caos nas medições de um rotor sujeito a rubbing, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil.
- Temperton, C., 1984, Variational normal mode initialization for a multi level model, *Monthly Weather Review*, vol. 112, p. 2303-2316.

Todling, R., 1997, Estimation theory and foundations of data assimilation, Notas de Aula, Universities Space Research Center, Data Assimilation Office, NASA/Goddard Space Flight Center, Estados Unidos.

Aplication of Conventional Data Assimilation Methods in Rotordynamics

Abstract. *Data Assimilation Methods are widely applied in climatic forecasting. Numerical metheorological predictions are made by solving differential equations which describe the climatic behavior. As these differential equations are theoretical ones it is necessary to impose convenient initial conditions and remove errors during the integration process. This is made by data assimilation methods. The problem is quite similar in rotordynamics: the motion is also governed by differential equations. Two factor, however, make the problem more complex in rotordynamics: a) rotor motion, only can usually be monitored in a few measurement points and these values must be extrapolated for all variables; b) the free vibration requires the solution of a complex eigenvelue problem and the complex eigenvectors will be used in Initialization Method. The Initialization Method consists in processing the initial conditions to filter no siginificant modes and the Dynamic Relaxation and Optimal Interpolation Methods use measurements to up to date integration results. This work presents na adaptation of Initialization, Dynamic Relaxation and Optimal Interpolation Methods, considered conventional data assimilation methos in metheorological sciences to rotordynamics. Some results of the application of the Initialization and Dynamic Relaxation Methods in a vertical rotor model which simulates the behavior of a Francis turbine were obtained and compared with direct integration of differential equations. A preliminar evaluation of these results was positive showing that these tools may be powerful in simulation of rotating and structural systems.*

Keywords: *data assimilation, rotordynamics, initialization, dynamic relaxation, optimal interpolation.*